Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2021, Ordinaria

mentoor.es

Problema 1. Campo Gravitatorio

Gràcies a les valuoses dades sobre les posicions dels astres que Tycho Brahe va recollir al llarg de la seva vida, Johannes Kepler va poder formular les seves famoses tres lleis.

a) **Deduïu la tercera llei de Kepler a partir de la segona llei de Newton i de la llei de gravitació universal, suposant que els planetes descriuen moviments circulars uniformes.**

b) **A partir de les dades de la taula, determineu la massa del Sol.**

Planeta	**Radi de l'òrbita (10^9 m)**	**Període (anys)**
Mercuri	$57,90$	$0,2408$
Venus	$108,2$	$0,6152$
Terra	$149,6$	$1,000$
Mart	$228,0$	$1,881$

Dada:
$\boldsymbol{G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}}$.

Solución:

a) **Deduïu la tercera llei de Kepler a partir de la segona llei de Newton i de la llei de gravitació universal, suposant que els planetes descriuen moviments circulars uniformes.**

La tercera ley de Kepler establece que el cuadrado del período orbital T de un planeta es directamente proporcional al cubo del radio de su órbita r, es decir:

$$T^2 \propto r^3.$$

Supongamos que los planetas se mueven en órbitas circulares uniformes alrededor del Sol. La aceleración centrípeta a_c necesaria para mantener al planeta en su órbita está dada por:

$$a_\mathrm{c} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

donde v es la velocidad orbital y ω es la frecuencia angular. La velocidad orbital v puede expresarse en función del período T:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Por lo tanto, la aceleración centrípeta se convierte en:

$$a_\mathrm{c} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r.$$

Según la ley de gravitación universal de Newton, la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre el planeta es:

$$F = G\frac{M_\mathrm{Sol} m}{r^2},$$

donde G es la constante de gravitación universal, M_Sol es la masa del Sol y m es la masa del planeta. La segunda ley de Newton establece que la fuerza es igual a la masa por la aceleración:

$$F = ma.$$

Por lo tanto, la aceleración centrípeta también puede expresarse como:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM_\mathrm{Sol}}{r^2}.$$

Igualando las dos expresiones de la aceleración centrípeta:

$$\frac{GM_{\text{Sol}}}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r.$$

Simplificando:

$$GM_{\text{Sol}} = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}.$$

De donde se deduce la tercera ley de Kepler para órbitas circulares:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Sol}}} r^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_{\text{Sol}}}{4\pi^2}.$$

Por lo tanto, la tercera ley de Kepler se deduce como,

$$\boldsymbol{T^2 \propto r^3},$$

donde el período orbital T al cuadrado es proporcional al cubo del radio de la órbita r.

b) A partir de les dades de la taula, determineu la massa del Sol.

Utilizamos la expresión deducida en la parte a):

$$M_{\text{Sol}} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}.$$

Tomemos los datos de la Tierra:

$$r = 149{,}6 \cdot 10^9 \text{ m}, \quad T = 1{,}000 \text{ años}.$$

Convertimos el período T a segundos:

$$T = 1{,}000 \text{ años} = 1{,}000 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}15576 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

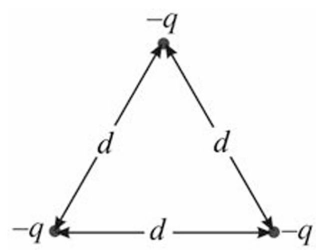
Sustituyendo en la fórmula:

$$M_{\text{Sol}} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (149{,}6 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot (3{,}15576 \cdot 10^7 \text{ s})^2} = 1{,}99 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Por lo tanto, la solución es $M_{\text{Sol}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

Problema 2. Campo Electromagnético

Tres càrregues negatives iguals, $-q$, es troben situades en els vèrtexs d'un triangle equilàter de costat d.



a) **Hi ha algun punt a l'interior del triangle on el camp elèctric sigui nul? Justifiqueu la resposta. Determineu el mòdul, la direcció i el sentit del camp elèctric en el vèrtex superior del triangle creat per les dues càrregues situades a la base. Expresseu el resultat en funció de q, d i la constant de Coulomb.**

b) **Determineu l'energia de formació d'aquest sistema de càrregues. Expresseu el resultat en funció de q, d i la constant de Coulomb.**

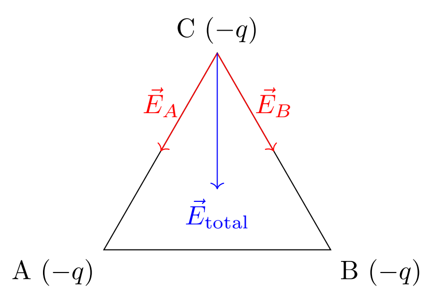
Solución:

a) **Hi ha algun punt a l'interior del triangle on el camp elèctric sigui nul? Justifiqueu la resposta. Determineu el mòdul, la direcció i el sentit del camp elèctric en el vèrtex superior del triangle creat per les dues càrregues situades a la base. Expresseu el resultat en funció de q, d i la constant de Coulomb.**

Sí, existe un punto en el interior del triángulo donde el campo eléctrico es nulo, específicamente en el centro del triángulo (el baricentro). Esto se debe a la simetría del sistema:

- Las tres cargas son iguales y están dispuestas en los vértices de un triángulo equilátero.
- El baricentro es equidistante de las tres cargas.
- Los campos eléctricos generados por cada carga en el baricentro tienen igual magnitud pero direcciones diferentes.
- La suma vectorial de los tres campos eléctricos en el baricentro se anula debido a la simetría.

Vamos a calcular el campo eléctrico en el vértice superior creado por las dos cargas de la base. Consideremos las dos cargas negativas $-q$ situadas en los vértices inferiores A y B del triángulo equilátero de lado d. Queremos calcular el campo eléctrico en el vértice superior C debido a estas dos cargas.



La distancia entre cada carga y el vértice C es d, ya que en un triángulo equilátero todos los lados son iguales. La magnitud del campo eléctrico producido por una carga puntual es:

$$E = k\frac{|q|}{d^2}.$$

Notamos que q es positivo en la expresión, ya que tomamos el valor absoluto de la carga. Los campos eléctricos $\vec{E}_A$ y $\vec{E}_B$ producidos por las cargas en A y B en el punto C tienen la misma magnitud y forman un ángulo de 30° con la vertical (eje y), ya que en un triángulo equilátero los ángulos son de 60°, y la línea que une cada carga con C forma un ángulo de 30° con la vertical. Descomponemos los campos en componentes x e y:

$$E_{A,x} = -E\sin(30^\circ) = -E\cdot\frac{1}{2}, \quad E_{A,y} = -E\cos(30^\circ) = -E\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$E_{B,x} = E\sin(30^\circ) = -E\cdot\frac{1}{2}, \quad E_{B,y} = -E\cos(30^\circ) = -E\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sumamos las componentes para obtener el campo total. Componente x total:

$$E_x = E_{A,x} + E_{B,x} = E\cdot\frac{1}{2} - E\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

Componente y total:

$$E_y = E_{A,y} + E_{B,y} = -E\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - E\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -E\cdot\sqrt{3}.$$

Como $E_x = 0$, el módulo del campo eléctrico total es simplemente:

$$E_{\text{total}} = E_y = E\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot\frac{kq}{d^2}.$$

Vemos que el campo eléctrico total apunta en la dirección vertical (eje y). Como las cargas son negativas y el campo eléctrico va desde las cargas negativas hacia el infinito, el campo eléctrico en C debido a las cargas en A y B apunta hacia abajo (dirección negativa del eje y).

Por lo tanto, el campo eléctrico en el vértice superior C debido a las dos cargas en la base es:

$$\boldsymbol{\vec{E}_{\text{total}} = -\sqrt{3}\cdot\frac{kq}{d^2}\,\vec{j},}$$

donde el signo negativo indica que el campo apunta en la dirección negativa del eje y (hacia abajo), pues $\vec{j}$ es el vector unitario en la dirección y.

b) Determineu l'energia de formació d'aquest sistema de càrregues. Expresseu el resultat en funció de q, d i la constant de Coulomb.

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es la suma de las energías potenciales entre todas las parejas de cargas. Para tres cargas, las interacciones son:

- Entre la carga 1 y la carga 2: U_{12}.
- Entre la carga 1 y la carga 3: U_{13}.
- Entre la carga 2 y la carga 3: U_{23}.

La energía potencial total es:

$$E_{p,\text{total}} = E_{12} + E_{13} + E_{23}.$$

Cada energía potencial entre dos cargas es:

$$E_{ij} = k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

En este caso, todas las cargas son $-q$, y las distancias entre ellas son d:

$$E_{12} = k\frac{(-q)(-q)}{d} = k\frac{q^2}{d},$$

$$E_{13} = k\frac{(-q)(-q)}{d} = k\frac{q^2}{d},$$

$$E_{23} = k\frac{(-q)(-q)}{d} = k\frac{q^2}{d}.$$

La energía potencial total es:

$$E_{p,\text{total}} = E_{12} + E_{13} + E_{23} = 3 \cdot \frac{kq^2}{d}.$$

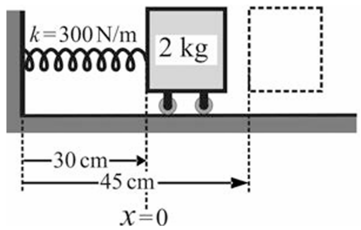
Por lo tanto, la energía de formación del sistema es:

$$\boldsymbol{U = 3 \cdot \frac{kq^2}{d},}$$

donde $\boldsymbol{k}$ es la constante de Coulomb, $\boldsymbol{q}$ es la magnitud de las cargas, y $\boldsymbol{d}$ es la distancia entre ellas.

Problema 3. Ondas

Un bloc de massa 2 kg, que inicialment es troba en repòs, està lligat a l'extrem d'una molla de constant elàstica 300 N/m i de longitud natural 30 cm. Per l'altre extrem, la molla està unida a una paret. Desplacem el bloc cap a la dreta fins que la molla assoleix una longitud total de 45 cm i el deixem anar, de manera que el bloc es posa a oscil·lar al voltant de la posició d'equilibri. La fricció entre el terra i el bloc és negligible.



a) **Determineu l'amplitud i el període de l'oscil·lació. Escriviu l'equació del moviment.**
b) **Representeu en la quadrícula adjunta l'evolució de l'energia mecànica, de l'energia cinètica i de l'energia potencial en funció del temps durant un període.**

Solución:

a) **Determineu l'amplitud i el període de l'oscil·lació. Escriviu l'equació del moviment.**

La amplitud de la oscilación es la máxima desplazamiento desde la posición de equilibrio. Dado que la longitud natural del resorte es 30 cm y se desplaza hasta 45 cm, la extensión del resorte es:

$$A = 45\text{ cm} - 30\text{ cm} = 15\text{ cm} = 0{,}15\text{ m}.$$

La frecuencia angular está dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{300\text{ N/m}}{2\text{ kg}}} = \sqrt{150\text{ s}^{-2}} = 12{,}247\text{ rad/s}.$$

El período de la oscilación se calcula como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12{,}247\text{ rad/s}} = 0{,}513\text{ s}.$$

Considerando que el bloque se libera desde la posición máxima con velocidad inicial cero, la ecuación del movimiento es:

$$x(t) = A\cos(\omega t) = 0{,}15\text{ m}\cdot\cos(12{,}247\ t).$$

Por lo tanto, la la amplitud es 0,15 m, el período es 0,513 s y la ecuación del movimiento es $x(t) = 0{,}15\text{ m}\cdot\cos(12{,}247\ t)$.

b) **Representeu en la quadrícula adjunta l'evolució de l'energia mecànica, de l'energia cinètica i de l'energia potencial en funció del temps durant un període.**

La energía mecánica E_m de un sistema masa-resorte sin fricción es la suma de la energía cinética E_c y la energía potencial elástica E_p:

$$E_m = E_c + E_p,$$

donde:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 \qquad \text{y} \qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

Dada la ecuación del movimiento $x(t) = A\cos(\omega t)$, la velocidad es:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t).$$

Entonces, la energía cinética es:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m(A\omega)^2\sin^2(\omega t) = 3,38\ \sin^2(12,247t)\ \text{J},$$

y la energía potencial es:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) = 3,38\ \cos^2(12,247t)\ \text{J}.$$

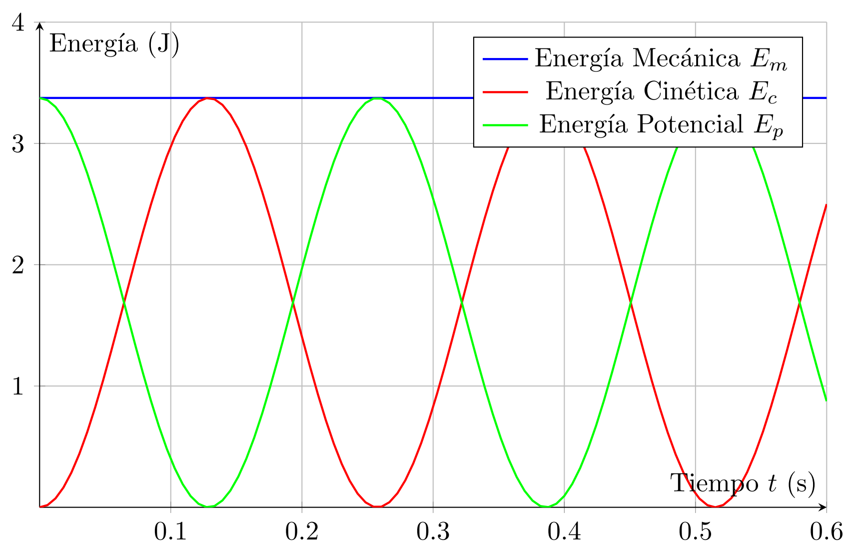
La energía mecánica total es:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}m(A\omega)^2\sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)\ \text{J}.$$

Simplificando, dado que $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}kA^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = \frac{1}{2}kA^2 = 3,38\ \text{J}.$$

A continuación se presenta una representación gráfica de la evolución de las energías mecánica, cinética y potencial en función del tiempo durante un período:



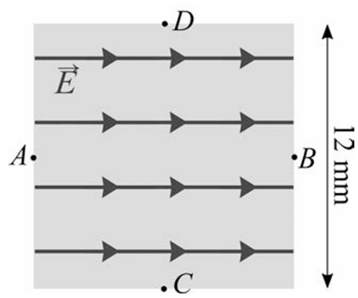
Descripción del gráfico:

- *Energía Mecánica E_m*: Es constante y igual a $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 300\ \text{N/m}\cdot(0{,}15\ \text{m})^2 = 3{,}375$ J.
- *Energía Cinética E_c*: Varía sinusoidalmente, alcanzando su máximo cuando la energía potencial es mínima.
- *Energía Potencial E_p*: Varía sinusoidalmente, alcanzando su máximo cuando la energía cinética es mínima.

Por lo tanto, la energía mecánica total del sistema es constante durante la oscilación., y la energía cinética y la energía potencial intercambian sus valores a lo largo del tiempo, manteniendo constante la suma total.

Problema 4. Campo Electromagnético

En una regió de l'espai de forma quadrada i de costat $d = 12$ mm, hi ha un camp elèctric uniforme i constant de valor $2,00 \times 10^6$ N/C.



a) **Quina és la diferència de potencial, $V_B - V_A$, entre els punts A i B de la figura? Quina és la diferència de potencial, $V_D - V_C$, entre els punts C i D de la figura? Justifiqueu les respostes.**

b) **Deixem un protó, inicialment aturat, en el punt A. Quin moviment descriurà? Justifiqueu la resposta. Quina velocitat (només el mòdul) tindrà en l'instant en què abandoni aquesta regió quadrada? Quin treball ha fet el camp elèctric sobre el protó?**

Dades:
$m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ **kg.**
$|e| = 1,602 \times 10^{-19}$ **C.**

Solución:

a) **Quina és la diferència de potencial, $V_B - V_A$, entre els punts A i B de la figura? Quina és la diferència de potencial, $V_D - V_C$, entre els punts C i D de la figura? Justifiqueu les respostes.**

Las líneas de campo eléctrico indican la dirección en la que el potencial disminuye. Por lo tanto, el potencial en A es mayor que en B, es decir:

$$V_B - V_A < 0.$$

La diferencia de potencial se calcula mediante:

$$\Delta V = V_B - V_A = -E \cdot d,$$

donde E es la magnitud del campo eléctrico y d es la distancia entre los puntos A y B. Dado que $d = 12$ mm $= 0{,}012$ m y $E = 2{,}00 \cdot 10^6$ N/C:

$$V_B - V_A = -(2{,}00 \cdot 10^6 \text{ N/C}) \cdot (0{,}012 \text{ m}) = -24{,}000 \text{ V} = -24 \text{ kV}.$$

Las líneas de campo eléctrico son horizontales, y el desplazamiento de C a D es vertical, es decir, perpendicular a las líneas de campo. Por lo tanto, no hay componente del campo eléctrico a lo largo del desplazamiento, y la diferencia de potencial es cero:

$$V_D - V_C = 0 \text{ V}.$$

Nótese que, para el desplazamiento de A a B, el movimiento es en la dirección del campo eléctrico, resultando en una disminución del potencial; mientras que, para el desplazamiento de C a D, el movimiento es perpendicular al campo eléctrico, por lo que no hay cambio en el potencial.

Por lo tanto, $V_B - V_A = -24$ kV y $V_D - V_C = 0$ V.

b) Deixem un protó, inicialment aturat, en el punt A. Quin moviment descriurà? Justifiqueu la resposta. Quina velocitat (només el mòdul) tindrà en l'instant en què abandoni aquesta regió quadrada? Quin treball ha fet el camp elèctric sobre el protó?

Al colocar un protón en el punto A dentro de un campo eléctrico uniforme, el protón experimenta una fuerza constante dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

donde $q = +e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C es la carga del protón y $\vec{E}$ es el campo eléctrico. ado que el protón tiene carga positiva, la fuerza ejercida por el campo eléctrico lo acelera en la dirección del campo. Como no hay fricción ni otras fuerzas actuando, el protón se moverá con una aceleración constante en la dirección del campo eléctrico. Por lo tanto, el protón describirá un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Calculamos la aceleración a:

$$a = \frac{F}{m_p} = \frac{qE}{m_p},$$

donde $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg es la masa del protón. Sustituyendo los valores:

$$a = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2{,}00 \cdot 10^{6}\ \text{N/C}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = \frac{3{,}204 \cdot 10^{-13}\ \text{N}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 1{,}92 \cdot 10^{14}\ \text{m/s}^2.$$

Para obtener la velocidad al abandonar la región cuadrada, utilizamos la ecuación del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$v^2 = v_0^2 + 2as,$$

donde:

$$v_0 = 0\ \text{m/s} \quad \text{(inicialmente en reposo)},$$

$$s = d = 12\ \text{mm} = 0{,}012\ \text{m}.$$

Entonces,

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 1{,}92 \cdot 10^{14}\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}012\ \text{m}} = \sqrt{4{,}608 \cdot 10^{12}} = 2{,}146 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}.$$

El trabajo realizado por el campo eléctrico es igual a la variación de la energía potencial eléctrica del protón:

$$W = -q\Delta V = -q(V_B - V_A) = -(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}) \cdot (-24{,}000\ \text{V}) = 3{,}845 \cdot 10^{-15}\ \text{J}.$$

Nótese que el trabajo realizado por el campo es positivo cuando el protón se mueve en la dirección del campo.

Por lo tanto, el protón lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en la dirección del campo eléctrico, la velocidad al abandonar la región cuadrada es $2{,}14 \cdot 10^{6}$ m/s y el trabajo realizado por el campo eléctrico es $3{,}85 \cdot 10^{-15}$ J.

Problema 5. Física Moderna

a) **Escriviu el nombre màssic, el nombre atòmic i el nombre de neutrons que té el $^{13}_{7}$N. En la desintegració del $^{13}_{7}$N, un dels protons del nucli de nitrogen es transforma segons una desintegració β^+: $^{1}_{1}p^+ \rightarrow^{1}_{0} n +_{+1} 1^0 e +^{0}_{0} \nu$. Escriviu la reacció de desintegració del $^{13}_{7}$N. Justifiqueu per què la desintegració β^+ no pot tenir lloc fora d'un nucli.**

b) **A partir de l'equació de l'evolució de la desintegració, determineu la relació entre la constant de desintegració λ i el període de semidesintegració. El període de semidesintegració del $^{13}_{7}$N és de 9,965 min. Si en un instant determinat hi ha una massa de 5 ng de $^{13}_{7}$N, quina quantitat en romandrà al cap de 30 min? Doneu l'expressió de l'activitat radioactiva en funció del temps. Quant de temps cal esperar perquè l'activitat radioactiva es redueixi fins a un 1% del seu valor inicial?**

Dades: $_{4}$Be $_{5}$B $_{6}$C $_{7}$N $_{8}$O $_{9}$F $_{10}$Ne $_{84}$Po $_{85}$At $_{86}$Rn $_{87}$Fr $_{88}$Ra $_{89}$Ac $_{90}$Th.

Solución:

a) **Escriviu el nombre màssic, el nombre atòmic i el nombre de neutrons que té el $^{13}_{7}$N. En la desintegració del $^{13}_{7}$N, un dels protons del nucli de nitrogen es transforma segons una desintegració β^+. Escriviu la reacció de desintegració del $^{13}_{7}$N. Justifiqueu per què la desintegració β^+ no pot tenir lloc fora d'un nucli.**

Vamos a determinar los números másico y atómico, y el número de neutrones:

– Número másico (A): Es el número total de protones y neutrones en el núcleo.

$$A = 13.$$

– Número atómico (Z): Es el número de protones en el núcleo.

$$Z = 7.$$

– Número de neutrones (N): Se calcula restando el número atómico al número másico.

$$N = A - Z = 13 - 7 = 6.$$

En una desintegración β^+, un protón se convierte en un neutrón, emitiendo un positrón (e^+) y un neutrino (ν_e). La reacción nuclear para el $^{13}_{7}$N es:

$$^{13}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{13}_{6}\text{C} + {}^{0}_{+1}\text{e} + {}^{0}_{0}\nu_e.$$

La desintegración β^+ implica la conversión de un protón en un neutrón dentro del núcleo. Sin embargo, fuera de un núcleo:

$$p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e.$$

Esto no es posible debido a que la masa del neutrón es mayor que la del protón:

$$m_n > m_p.$$

Por lo tanto, para que la desintegración β^+ ocurra, se requiere energía adicional que generalmente proviene de la energía del núcleo. Sin esta energía extra, la desintegración no es energeticamente favorable y, por lo tanto, no puede ocurrir en partículas libres.

Por lo tanto, $A = 13$, $Z = 7$ y $N = 6$. La reacción nuclear para el $^{13}_{7}$N es:

$$^{13}_{7}\text{N} \rightarrow {}^{13}_{6}\text{C} + {}^{0}_{+1}\text{e} + {}^{0}_{0}\nu_e.$$

Además, la desintegración β^+ no puede ocurrir fuera de un núcleo porque requiere una energía adicional para compensar la mayor masa del neutrón en comparación con el protón.

b) A partir de l'equació de l'evolució de la desintegració, determineu la relació entre la constant de desintegració $\boldsymbol{\lambda}$ i el període de semidesintegració. El període de semidesintegració del ${}^{13}_{7}\text{N}$ és de 9, 965 min. Si en un instant determinat hi ha una massa de 5 ng de ${}^{13}_{7}\text{N}$, quina quantitat en romandrà al cap de 30 min? Doneu l'expressió de l'activitat radioactiva en funció del temps. Quant de temps cal esperar perquè l'activitat radioactiva es redueixi fins a un 1% del seu valor inicial?

La ley de desintegración radioactiva se expresa como:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

donde:

$$N(t) = \text{cantidad de núcleos en el tiempo } t,$$

$$N_0 = \text{cantidad de núcleos inicialmente.}$$

En el período de semidesintegración, la cantidad de núcleos se reduce a la mitad:

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Dividiendo ambos lados por N_0:

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Aplicando logaritmo natural a ambos lados:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T_{1/2} \quad \Rightarrow \quad -\ln 2 = -\lambda T_{1/2}.$$

Por lo tanto, la relación es:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Dado:

$$T_{1/2} = 9{,}965 \text{ min}.$$

Convertimos el tiempo a segundos para mantener la consistencia de unidades:

$$T_{1/2} = 9{,}965 \text{ min} \cdot 60 \ \frac{\text{s}}{\text{min}} = 597{,}9 \text{ s}.$$

Entonces:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{597{,}9 \text{ s}} = 1{,}160 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

Dado:

$$t = 30 \text{ min} = 1800 \text{ s}.$$

Inicialmente:

$$m_0 = 5 \text{ ng} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ g} = 5 \cdot 10^{-12} \text{ kg}.$$

La cantidad restante es:

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t} = 5 \cdot 10^{-12} \text{ kg} \cdot e^{-1{,}160 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \cdot 1800 \text{ s}} = 6{,}20 \cdot 10^{-13} \text{ kg} = 0{,}620 \text{ ng}.$$

La actividad radioactiva $A(t)$ se define como la tasa de desintegración:

$$A(t) = \lambda N(t),$$

donde $N(t)$ es el número de núcleos radioactivos en el tiempo t. Si consideramos la relación entre masa y número de núcleos ($N = \dfrac{m}{m_{\text{mol}}}$, pero aquí simplificamos considerando proporcionalidad), la expresión queda:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Queremos que:

$$A(t) = 0{,}01A_0.$$

Entonces,

$$0{,}01 = e^{-\lambda t}.$$

Aplicando logaritmo natural:

$$\ln(0{,}01) = -\lambda t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\ln(0{,}01)}{\lambda} = 66{,}1 \text{ min}.$$

Por lo tanto, la solución es:

– **Relación entre $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{T_{1/2}}$:**

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}}.$$

– **Cantidad restante después de 30 min:**

$$\boldsymbol{m(30 \text{ min}) = 0{,}620 \text{ ng}}.$$

– **Expresión de la actividad radioactiva:**

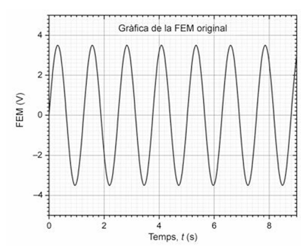
$$\boldsymbol{A(t) = A_0 e^{-\lambda t}}.$$

– **Tiempo para que la actividad se reduzca al 1%:**

$$\boldsymbol{t = 66{,}1 \text{ min}}.$$

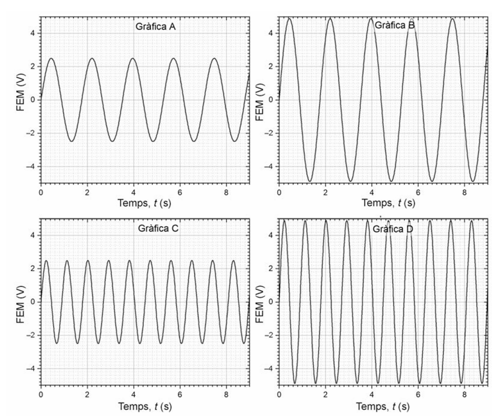
Problema 6. Campo Electromagnético

Un imant es desplaça horitzontalment, entrant i sortint d'una bobina plana (de N espires i secció S), seguint un moviment harmònic simple, que crea un camp magnètic perpendicular a la bobina i de mòdul $B(t) = B_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$.



a) **Determineu el flux del camp magnètic a través d'una espira i la força electromotriu (FEM) en funció dels paràmetres B_0, ω, φ_0, N i S.**
b) **Si la bobina té una resistència R, determineu el corrent màxim que pot circular per la bobina en funció dels paràmetres B_0, ω, φ_0, N, S i R. Indiqueu quina de les gràfiques següents (de la A fins a la D) mostra correctament la FEM si es redueix la freqüència del moviment de l'imant. Justifiqueu la resposta.**

Dada: En totes les gràfiques s'utilitza la mateixa escala per al temps (eix x) i per a la FEM (eix y).



Solución:

a) **Determineu el flux del camp magnètic a través d'una espira i la força electromotriu (FEM) en funció dels paràmetres B_0, ω, φ_0, N i S.**

Dado que el campo magnético es perpendicular a la bobina, el flujo magnético a través de una espira es:

$$\Phi(t) = B(t) \cdot S = B_0 S \cos(\omega t + \varphi_0).$$

La FEM inducida en una bobina con N espiras está dada por la Ley de Faraday:

$$\varepsilon(t) = -N \frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Calculamos la derivada del flujo magnético respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -B_0 S \omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Sustituyendo en la expresión de la FEM:

$$\varepsilon(t) = -N \cdot (-B_0 S\omega \sin(\omega t + \varphi_0)) = NB_0 S\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Por lo tanto, el flujo magnético es $\boldsymbol{\Phi(t) = B_0 S \cos(\omega t + \varphi_0)}$ y la FEM es $\boldsymbol{\varepsilon(t) = NB_0 S\omega \sin(\omega t + \varphi_0)}$.

b) **Si la bobina té una resistència $\boldsymbol{R}$, determineu el corrent màxim que pot circular per la bobina en funció dels paràmetres $\boldsymbol{B_0}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varphi_0}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$ i $\boldsymbol{R}$. Indiqueu quina de les gràfiques següents (de la A fins a la D) mostra correctament la FEM si es redueix la freqüència del moviment de l'imant. Justifiqueu la resposta.**

La corriente inducida en la bobina está dada por la Ley de Ohm:

$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = \frac{NB_0 S\omega \sin(\omega t + \varphi_0)}{R}.$$

El módulo de la corriente máxima es:

$$I_{\text{máx}} = \frac{NB_0 S\omega}{R}.$$

Observamos que la FEM está dada por:

$$\varepsilon(t) = NB_0 S\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{máx}} = NB_0 S\omega.$$

Al reducir la frecuencia ω, dos efectos se producen:

- *Reducción de la amplitud de la FEM:* Dado que $\varepsilon_{\text{máx}} = NB_0 S\omega$, al disminuir ω, también disminuye la amplitud de la FEM.
- *Aumento del período de oscilación:* El período T está relacionado con la frecuencia angular ω por $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Al disminuir ω, el período T aumenta.

La gráfica que muestra correctamente la FEM al reducir la frecuencia del movimiento del imán es la A, ya que una disminución en ω implica una disminución en la amplitud de la FEM y un aumento en el período de oscilación.

Por lo tanto, el módulo de la corriente máxima es $\boldsymbol{I_{\text{máx}} = NB_0 S\omega / R}$ y la gráfica correcta es la A, ya que al reducir la frecuencia $\boldsymbol{\omega}$, la amplitud de la FEM disminuye y el período de oscilación aumenta.

Problema 7. Ondas

Magnificat en re major **(BWV 243) és una de les grans obres vocals de Johann Sebastian Bach, publicada el 1723 i escrita per a cor a cinc veus i orquestra. La corda d'un violí fa 32, 5 cm de llargària i la freqüència fonamental corresponent al re major és de 38, 89 Hz.**

a) **Dibuixeu l'harmònic fonamental i el tercer harmònic i indiqueu-ne els nodes i els ventres. Determineu les longituds d'ona de cadascun dels harmònics i calculeu la velocitat de propagació de l'ona que produeix aquesta nota en la corda del violí. Quina serà la freqüència de l'harmònic fonamental si reduïm la llargària de la corda a 27 cm tot mantenint la mateixa tensió a la corda?**

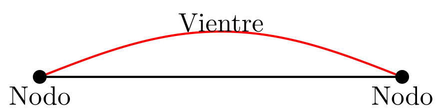
b) **Un espectador situat al segon pis del Palau de la Música Catalana percep un nivell d'intensitat sonora de 30 dB, corresponent al so dels violins, situats a 23 m. Quina és la potència amb què els violins emeten el so? Si, degut a les restriccions per la COVID-19, el nombre de violinistes es redueix a la meitat, quin serà el nivell de la intensitat sonora generada pels violins a 23 m de distància?**

Dada: $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$.

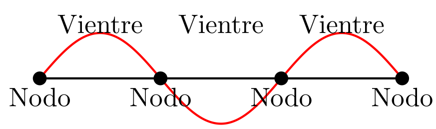
Solución:

a) **Dibuixeu l'harmònic fonamental i el tercer harmònic i indiqueu-ne els nodes i els ventres. Determineu les longituds d'ona de cadascun dels harmònics i calculeu la velocitat de propagació de l'ona que produeix aquesta nota en la corda del violí. Quina serà la freqüència de l'harmònic fonamental si reduïm la llargària de la corda a 27 cm tot mantenint la mateixa tensió a la corda?**

Dibujo del armónico fundamental y del tercer armónico:



Tercer armónico



Armónico fundamental

Para una cuerda fija en ambos extremos, las longitudes de onda de los armónicos vienen dadas por:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n},$$

donde n es el número de armónico y L es la longitud de la cuerda.

<u>Longitud de onda del armónico fundamental ($n = 1$):</u>

$$\lambda_1 = \frac{2L}{1} = 2L = 2 \cdot 0{,}325 \text{ m} = 0{,}650 \text{ m}.$$

<u>Longitud de onda del tercer armónico ($n = 3$):</u>

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{2 \cdot 0{,}325 \text{ m}}{3} = 0{,}2167 \text{ m}.$$

La velocidad de propagación v se calcula usando la relación:

$$v = f \cdot \lambda.$$

Para el armónico fundamental:

$$v = f_1 \cdot \lambda_1 = 38{,}89 \text{ Hz} \cdot 0{,}650 \text{ m} = 25{,}2785 \text{ m/s}.$$

Para encontrar la nueva frecuencia al reducir la longitud a 27 cm, tenemos en cuenta que, manteniendo la misma tensión en la cuerda, la velocidad de propagación v permanece constante:

$$v' = v = 25{,}28 \text{ m/s}.$$

La nueva longitud de la cuerda es:

$$L' = 27 \text{ cm} = 0{,}27 \text{ m}.$$

Longitud de onda del armónico fundamental con la nueva longitud:

$$\lambda_1' = 2L' = 2 \cdot 0{,}27 \text{ m} = 0{,}54 \text{ m}.$$

Nueva frecuencia:

$$f_1' = \frac{v'}{\lambda_1'} = \frac{25{,}28 \text{ m/s}}{0{,}54 \text{ m}} = 46{,}81 \text{ Hz}.$$

Por lo tanto, la solución es:

– **Las longitudes de onda son:**

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}650 \text{ m}, \quad \lambda_3 = 0{,}2167 \text{ m}.}$$

– **La velocidad de propagación es:**

$$\boldsymbol{v = 25{,}28 \text{ m/s}.}$$

– **La nueva frecuencia fundamental al reducir la longitud a 27 cm es:**

$$\boldsymbol{f_1' = 46{,}81 \text{ Hz}.}$$

b) Un espectador situat al segon pis del Palau de la Música Catalana percep un nivell d'intensitat sonora de 30 dB, corresponent al so dels violins, situats a 23 m. Quina és la potència amb què els violins emeten el so? Si, degut a les restriccions per la COVID-19, el nombre de violinistes es redueix a la meitat, quin serà el nivell de la intensitat sonora generada pels violins a 23 m de distància?

El nivel de intensidad sonora β está relacionado con la intensidad I por:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Despejando I:

$$\frac{I}{I_0} = 10^{\beta/10} \quad \Rightarrow \quad I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}.$$

Sustituyendo los valores:

$$I = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^{30/10} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^3 = 10^{-9} \text{ W/m}^2.$$

Suponiendo que el sonido se propaga de forma esférica, la potencia se calcula como:

$$I = \frac{P}{A} \quad \Rightarrow \quad P = I \cdot A = I \cdot 4\pi r^2,$$

donde $r = 23$ m es la distancia al espectador. Calculamos:

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (23 \text{ m})^2 = 4\pi \cdot 529 \text{ m}^2 = 6645{,}48 \text{ m}^2.$$

Entonces,

$$P = 10^{-9}\ \mathrm{W/m^2} \cdot 6645{,}48\ \mathrm{m^2} = 6{,}6455 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W}.$$

Vamos a calcular el nuevo nivel de intensidad sonora al reducir los violinistas a la mitad. Al reducir el número de violinistas a la mitad, la potencia emitida se reduce a la mitad:

$$P' = \frac{P}{2} = 3{,}3228 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W}.$$

La nueva intensidad sonora es:

$$I' = \frac{P'}{A} = \frac{P/2}{A} = \frac{I}{2} = \frac{10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}}{2} = 5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}.$$

El nuevo nivel de intensidad sonora es:

$$\beta' = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I'}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 26{,}99\ \mathrm{dB} \approx 27\ \mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, la solución es:

- **La potencia emitida por los violines es:**

$$\boldsymbol{P = 6{,}6455 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W}.}$$

- **El nuevo nivel de intensidad sonora al reducir los violinistas a la mitad es:**

$$\boldsymbol{\beta' \approx 27\ \mathrm{dB}.}$$

Problema 8. Física Moderna

Tenim dues ones monocromàtiques, una de $\lambda = 750$ nm, corresponent al color vermell, i una altra de $\lambda = 550$ nm, corresponent al color verd.

a) **Quina de les dues ones té els fotons més energètics? Calculeu la freqüència i l'energia d'un fotó i les d'un mol de fotons per a cadascuna de les dues radiacions.**

b) **A continuació, volem reproduir l'efecte fotoelèctric il·luminant amb llum monocromàtica una placa de rubidi. Determineu la longitud d'ona llindar perquè es produeixi l'efecte fotoelèctric. Les ones visibles de l'apartat anterior seran capaces d'arrencar un electró de la superfície del rubidi? Si això és possible, quina serà l'energia cinètica adquirida per l'electró? Per a l'efecte fotoelèctric, representeu esquemàticament com varia l'energia cinètica màxima dels electrons arrencats en funció de l'energia dels fotons incidents. Comenteu el significat de les dues zones diferenciades.**

Dades:
La funció de treball del rubidi és $3,46 \times 10^{-19}$ J.
$N_A = 6,022 \times 10^{23}$.
$c = 3,00 \times 10^{8}$ m s^{-1}.
$h = 6,63 \times 10^{-34}$ J s.
$m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg.

Solución:

a) **Quina de les dues ones té els fotons més energètics? Calculeu la freqüència i l'energia d'un fotó i les d'un mol de fotons per a cadascuna de les dues radiacions.**

La energía de un fotón está dada por:

$$E_{\text{fotón}} = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

donde:
- $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s es la constante de Planck,
- $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío,
- λ es la longitud de onda.

Cuanto menor sea la longitud de onda λ, mayor será la energía del fotón. Por lo tanto, la onda con $\lambda = 550$ nm (color verde) tiene fotones más energéticos que la de $\lambda = 750$ nm (color rojo).

Cálculo de la frecuencia y energía de un fotón para cada radiación:
Para la onda roja ($\lambda_r = 750 \text{ nm} = 750 \cdot 10^{-9}$ m):

Frecuencia f_r:

$$f_r = \frac{c}{\lambda_r} = \frac{3{,}00 \cdot 10^{8} \text{ m/s}}{750 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4{,}00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Energía de un fotón $E_{fotón,r}$:

$$E_{\text{fotón},r} = hf_r = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 4{,}00 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 2{,}65 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Energía de un mol de fotones $E_{mol,r}$:

$$E_{\text{mol},r} = N_A \cdot E_{\text{fotón},r} = 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 2{,}65 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1{,}60 \cdot 10^{5} \text{ J/mol}.$$

Para la onda verde ($\lambda_v = 550 \text{ nm} = 550 \cdot 10^{-9}$ m):

Frecuencia f_v:

$$f_v = \frac{c}{\lambda_v} = \frac{3{,}00 \cdot 10^{8} \text{ m/s}}{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5{,}45 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Energía de un fotón $E_{fotón,v}$:

$$E_{\text{fotón},v} = hf_v = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 5{,}45 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} = 3{,}61 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Energía de un mol de fotones $E_{mol,v}$:

$$E_{\text{mol},v} = N_A \cdot E_{\text{fotón},v} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \cdot 3{,}61 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}17 \cdot 10^{5}\ \text{J/mol}.$$

Por lo tanto, la solución es:

– **La onda verde ($\boldsymbol{\lambda = 550}$ nm) tiene los fotones más energéticos.**
– **Para la onda roja:**

$$\boldsymbol{f_r = 4{,}00 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}, \quad E_{\text{fotón},r} = 2{,}65 \cdot 10^{-19}\ \text{J}, \quad E_{\text{mol},r} = 1{,}60 \cdot 10^{5}\ \text{J/mol}.}$$

– **Para la onda verde:**

$$\boldsymbol{f_v = 5{,}45 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}, \quad E_{\text{fotón},v} = 3{,}61 \cdot 10^{-19}\ \text{J}, \quad E_{\text{mol},v} = 2{,}17 \cdot 10^{5}\ \text{J/mol}.}$$

b) **A continuació, volem reproduir l'efecte fotoelèctric il·luminant amb llum monocromàtica una placa de rubidi. Determineu la longitud d'ona llindar perquè es produeixi l'efecte fotoelèctric. Les ones visibles de l'apartat anterior seran capaces d'arrencar un electró de la superfície del rubidi? Si això és possible, quina serà l'energia cinètica adquirida per l'electró? Per a l'efecte fotoelèctric, representeu esquemàticament com varia l'energia cinètica màxima dels electrons arrencats en funció de l'energia dels fotons incidents. Comenteu el significat de les dues zones diferenciades.**

La energía mínima necesaria para arrancar un electrón de la superficie es la función de trabajo W_0. La longitud de onda umbral corresponde a los fotones cuya energía es igual a W_0:

$$E_{\text{fotón}} = W_0 \quad \Rightarrow \quad hf_0 = W_0 \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{W_0}{h} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{hc}{W_0}.$$

Dado que $W_0 = 3{,}46 \cdot 10^{-19}$ J, calculamos:

$$\lambda_0 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{3{,}46 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 5{,}74 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 574\ \text{nm}.$$

Determinación de si las ondas anteriores pueden arrancar electrones:
– *Onda roja ($\lambda_r = 750$ nm):* Como $\lambda_r > \lambda_0$, su energía es menor que W_0. Por lo tanto, no puede arrancar electrones del rubidio.
– *Onda verde ($\lambda_v = 550$ nm):* Como $\lambda_v < \lambda_0$, su energía es mayor que W_0. Por lo tanto, sí puede arrancar electrones del rubidio.

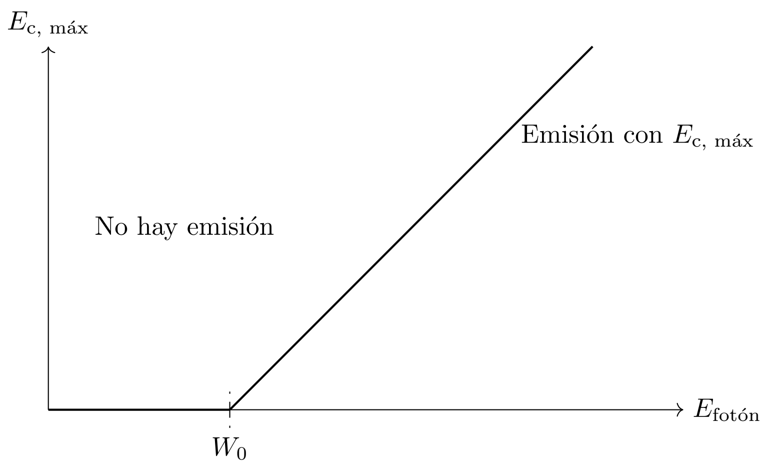
La energía cinética máxima de los electrones emitidos viene dada por:

$$E_{\text{c, máx}} = E_{\text{fotón}} - W_0.$$

Para la onda verde:

$$E_{\text{c, máx}} = 3{,}61 \cdot 10^{-19}\ \text{J} - 3{,}46 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}50 \cdot 10^{-20}\ \text{J}.$$

Representación gráfica de $E_{\text{c, máx}}$ en función de $E_{\text{fotón}}$:



Algunas observaciones son las siguientes:

– *Zona izquierda ($E_{fotón} < W_0$):* Los fotones no tienen suficiente energía para superar la función de trabajo, por lo que no se emiten electrones. La energía cinética máxima es cero.
– *Zona derecha ($E_{fotón} > W_0$):* Los fotones tienen energía suficiente para arrancar electrones. La energía cinética máxima de los electrones aumenta linealmente con la energía de los fotones, siguiendo la ecuación:

$$E_{\text{c, máx}} = E_{\text{fotón}} - W_0.$$

Por lo tanto, la solución es:

– **La longitud de onda umbral es $\boldsymbol{\lambda_0 = 574}$ nm.**
– **La onda verde puede arrancar electrones; la onda roja no puede.**
– **La energía cinética adquirida por el electrón es $\boldsymbol{E_{\text{c, máx}} = 1{,}50 \cdot 10^{-20}}$ J.**
– **El gráfico muestra que para energías de fotón menores que $\boldsymbol{W_0}$ no se emiten electrones, y para energías mayores, $\boldsymbol{E_{\text{c, máx}}}$ aumenta linealmente con $\boldsymbol{E_{\text{fotón}}}$.**